Enrolamento e quantização de distribuições de probabilidade por reticulados

Fábio C. C. Meneghetti

IMECC — Unicamp

7 de junho de 2022

Domínios fundamentais

- seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ reticulado de posto completo ($\dim \Lambda = n$)

Domínios fundamentais

- seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ reticulado de posto completo ($\dim \Lambda = n$)
- um domínio fundamental é um conjunto mensurável $\mathcal{D}$ tal que

Domínios fundamentais

- seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ reticulado de posto completo ($\dim \Lambda = n$)
- um domínio fundamental é um conjunto mensurável $\mathcal{D}$ tal que
  1. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + \mathcal{D}) = \mathbb{R}^n$

Domínios fundamentais

- seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ reticulado de posto completo ($\dim \Lambda = n$)
- um domínio fundamental é um conjunto mensurável $\mathcal{D}$ tal que
  1. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + \mathcal{D}) = \mathbb{R}^n$
  2. $(\lambda + \mathcal{D}) \cap (\lambda' + \mathcal{D}) = \emptyset, \quad \lambda \neq \lambda' \in \Lambda$

Domínios fundamentais

- seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ reticulado de posto completo ($\dim \Lambda = n$)
- um domínio fundamental é um conjunto mensurável $\mathcal{D}$ tal que
  1. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + \mathcal{D}) = \mathbb{R}^n$
  2. $(\lambda + \mathcal{D}) \cap (\lambda' + \mathcal{D}) = \emptyset, \quad \lambda \neq \lambda' \in \Lambda$
- **Exemplos:**

Domínios fundamentais

- seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ reticulado de posto completo ($\dim \Lambda = n$)
- um domínio fundamental é um conjunto mensurável $\mathcal{D}$ tal que
  1. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + \mathcal{D}) = \mathbb{R}^n$
  2. $(\lambda + \mathcal{D}) \cap (\lambda' + \mathcal{D}) = \emptyset, \quad \lambda \neq \lambda' \in \Lambda$
- **Exemplos:**
  - paralelotopo fundamental com relação a uma base $\beta = \{b_1, \ldots, b_n\}$:

$$\mathcal{P}(\beta) = \left\{ x_1 b_1 + \ldots x_n b_n : x_i \in [0, 1) \right\}$$

Domínios fundamentais

- seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ reticulado de posto completo ($\dim \Lambda = n$)
- um domínio fundamental é um conjunto mensurável $\mathcal{D}$ tal que
  1. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + \mathcal{D}) = \mathbb{R}^n$
  2. $(\lambda + \mathcal{D}) \cap (\lambda' + \mathcal{D}) = \emptyset, \quad \lambda \neq \lambda' \in \Lambda$
- **Exemplos:**
  - paralelotopo fundamental com relação a uma base $\beta = \{b_1, \ldots, b_n\}$:

$$\mathcal{P}(\beta) = \left\{ x_1 b_1 + \ldots x_n b_n : x_i \in [0, 1) \right\}$$

  - região de Voronói, pode ser reduzida a um domínio fundamental cortando algumas bordas:

$$\mathcal{V}(\Lambda) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \|x + \lambda\|, \quad \forall \lambda \in \Lambda \right\}$$

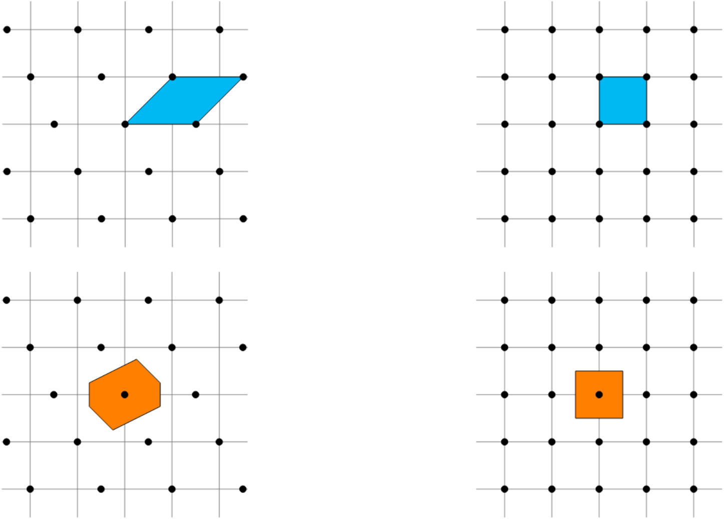


Figura: Paralelotopo fundamental e região de Voronói, respectivamente.

Toro como espaço quociente

- o quociente de $\mathbb{R}^n$ por Λ é

$$\mathbb{R}^n/\Lambda := \{x + \Lambda : x \in \mathbb{R}^n\},$$

que é munido de uma função projeção $\pi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Lambda$,

$$\pi(x) = x + \Lambda.$$

Identificação entre $\mathcal{D}$ e $\mathbb{R}^n/\Lambda$

Proposição

O mapa restrito $\pi|_{\mathcal{D}} \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n/\Lambda$ é bijeção, para qualquer região fundamental $\mathcal{D}$.

Identificação entre $\mathcal{D}$ e $\mathbb{R}^n/\Lambda$

Proposição

O mapa restrito $\pi|_{\mathcal{D}} \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n/\Lambda$ *é bijeção, para qualquer região fundamental* $\mathcal{D}$*.*

Identificação entre $\mathcal{D}$ e $\mathbb{R}^n/\Lambda$

Proposição

O mapa restrito $\pi|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n/\Lambda$ é bijeção, para qualquer região fundamental $\mathcal{D}$.

Demonstração.

Identificação entre $\mathcal{D}$ e $\mathbb{R}^n/\Lambda$

Proposição

O mapa restrito $\pi|_{\mathcal{D}} \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n/\Lambda$ é bijeção, para qualquer região fundamental $\mathcal{D}$.

Demonstração.

1. **Injetividade:** $\pi|_{\mathcal{D}}(x) = \pi|_{\mathcal{D}}(y) \iff x + \Lambda = y + \Lambda \iff x - y \in \Lambda \iff x + 0 = y + \lambda$ para algum $\lambda \in \Lambda$. Ter $\lambda \neq 0$ iria contradizer $(\mathcal{D} + 0) \cap (\mathcal{D} + \lambda) = \emptyset$, portanto $x = y$.

Identificação entre $\mathcal{D}$ e $\mathbb{R}^n/\Lambda$

Proposição

O mapa restrito $\pi|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n/\Lambda$ é bijeção, para qualquer região fundamental $\mathcal{D}$.

Demonstração.

1. **Injetividade:** $\pi|_{\mathcal{D}}(x) = \pi|_{\mathcal{D}}(y) \iff x + \Lambda = y + \Lambda \iff x - y \in \Lambda \iff x + 0 = y + \lambda$ para algum $\lambda \in \Lambda$. Ter $\lambda \neq 0$ iria contradizer $(\mathcal{D} + 0) \cap (\mathcal{D} + \lambda) = \emptyset$, portanto $x = y$.
2. **Sobrejetividade:** tome $(x + \Lambda) \in \mathbb{R}^n/\Lambda$. De $\mathbb{R}^n = \bigcup_{\lambda \in \Lambda}(\lambda + \mathcal{D})$, existem $\bar{x} \in \mathcal{D}$, $\lambda \in \Lambda$ tais que $x = \bar{x} + \lambda$. Assim

$$(x + \Lambda) = (\bar{x} + \Lambda) = \pi|_{\mathcal{D}}(\bar{x}).$$

□

- em outras palavras, cada classe $x + \Lambda$ possui um único representante em $\mathcal{D}$.

- em outras palavras, cada classe $x + \Lambda$ possui um único representante em $\mathcal{D}$.
- essa identificação é mensurável: não altera o volume de subconjuntos, e esse volume é o mesmo para qualquer domínio fundamental escolhido.

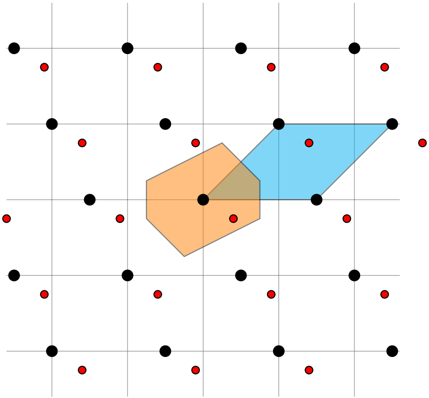


Figura: Classe lateral $x + \Lambda$ interseccionando cada região fundamental em apenas um ponto.

Distribuição enrolada

- seja $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ função tal que $\int_{\mathbb{R}^n} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (chamada função densidade de probabilidade)

Distribuição enrolada

- seja $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ função tal que $\int_{\mathbb{R}^n} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (chamada função densidade de probabilidade)
- a **distribuição enrolada** por um reticulado Λ é definida como $p_\pi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$,
$$p_\pi(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} p(x + \lambda)$$

Distribuição enrolada

- seja $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ função tal que $\int_{\mathbb{R}^n} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (chamada função densidade de probabilidade)
- a **distribuição enrolada** por um reticulado Λ é definida como $p_\pi\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$,

$$p_\pi(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} p(x + \lambda)$$

  - em outras palavras, somamos a probabilidade para cada classe $(x + \Lambda) \in \mathbb{R}^n/\Lambda$

Distribuição enrolada

- seja $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ função tal que $\int_{\mathbb{R}^n} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (chamada função densidade de probabilidade)
- a **distribuição enrolada** por um reticulado Λ é definida como $p_\pi \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$,

$$p_\pi(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} p(x + \lambda)$$

  - em outras palavras, somamos a probabilidade para cada classe $(x + \Lambda) \in \mathbb{R}^n/\Lambda$
  - alternativamente, poderia ser vista como distribuição sobre $\mathbb{R}^n/\Lambda$

Exemplos

1. **Normal univariada.** $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \Lambda = k\mathbb{Z}$

$$p_\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{z \in \mathbb{Z}} \exp\left(\frac{-(x+kz-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Exemplos

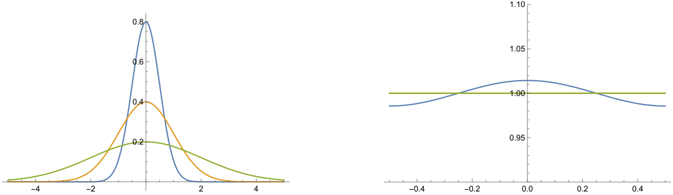
1. **Normal univariada.** $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \Lambda = k\mathbb{Z}$

$$p_\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{z\in\mathbb{Z}} \exp\left(\frac{-(x+kz-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Exemplos

1. **Normal univariada.** $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \Lambda = k\mathbb{Z}$

$$p_\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{z \in \mathbb{Z}} \exp\left(\frac{-(x+kz-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



(a) Original (b) Enrolada

2. **Exponencial.** $p(x) = \nu e^{-\nu x},\ x > 0, \quad \Lambda = k\mathbb{Z}$

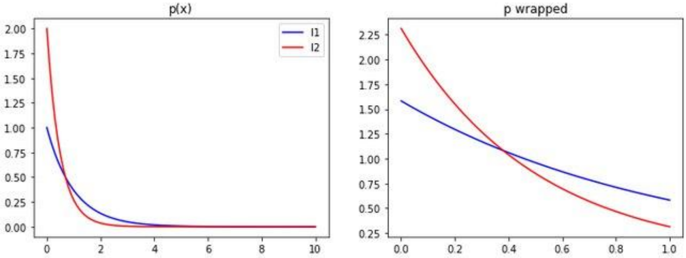
$$p_\pi(y) = \frac{\nu e^{-\nu y}}{1 - e^{-k\nu}}$$

2. **Exponencial.** $p(x) = \nu e^{-\nu x},\ x > 0, \quad \Lambda = k\mathbb{Z}$

$$p_\pi(y) = \frac{\nu e^{-\nu y}}{1 - e^{-k\nu}}$$

2. **Exponencial.** $p(x) = \nu e^{-\nu x},\ x > 0, \quad \Lambda = k\mathbb{Z}$

$$p_\pi(y) = \frac{\nu e^{-\nu y}}{1 - e^{-k\nu}}$$



Aplicações

1. **Estatística direcional.** estuda a estatística de dados que são circulares, definidos no círculo, esfera ($\mathbb{S}^n$) ou toro ($\mathbb{T}^n$) — esta último é nosso caso.

   Exemplos:

Aplicações

1. **Estatística direcional.** estuda a estatística de dados que são circulares, definidos no círculo, esfera ($\mathbb{S}^n$) ou toro ($\mathbb{T}^n$) — esta último é nosso caso.

   Exemplos:

   - a frequência de um evento em função do dia do ano é um dado circular

Aplicações

1. **Estatística direcional.** estuda a estatística de dados que são circulares, definidos no círculo, esfera ($\mathbb{S}^n$) ou toro ($\mathbb{T}^n$) — esta último é nosso caso.

   Exemplos:

   - a frequência de um evento em função do dia do ano é um dado circular
   - a distribuição de substâncias na superfície de um planeta é um dado esférico

Aplicações

1. **Estatística direcional.** estuda a estatística de dados que são circulares, definidos no círculo, esfera ($\mathbb{S}^n$) ou toro ($\mathbb{T}^n$) — esta último é nosso caso.

Exemplos:

- a frequência de um evento em função do dia do ano é um dado circular
- a distribuição de substâncias na superfície de um planeta é um dado esférico
- a distribuição conjunta de quaisquer dois dados circulares é um dado no toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

2. **Codificação em canais AWGN e Wiretap.**

2. **Codificação em canais AWGN e Wiretap.**
   - O *fator de achamento* é definido como a distância L^∞ entre uma distribuição enrolada e uma uniforme em $\mathcal{D}$:

$$\epsilon_\Lambda(p) = \sup_{x \in \mathcal{D}} \left| p_w(x) - \frac{1}{\det \Lambda} \right|$$

2. **Codificação em canais AWGN e Wiretap.**

- O *fator de achamento* é definido como a distância L^∞ entre uma distribuição enrolada e uma uniforme em $\mathcal{D}$:

$$\epsilon_\Lambda(p) = \sup_{x\in\mathcal{D}} \left| p_w(x) - \frac{1}{\det \Lambda} \right|$$

- quando temos um canal AWGN ou Wiretap com ruído gaussiano, o fator de achatamento pode ser usado construír códigos com eficiência máxima (atingem a capacidade de Shannon)

2. **Codificação em canais AWGN e Wiretap.**
   - O *fator de achamento* é definido como a distância L^∞ entre uma distribuição enrolada e uma uniforme em $\mathcal{D}$:

$$\epsilon_\Lambda(p) = \sup_{x \in \mathcal{D}} \left| p_w(x) - \frac{1}{\det \Lambda} \right|$$

   - quando temos um canal AWGN ou Wiretap com ruído gaussiano, o fator de achatamento pode ser usado construír códigos com eficiência máxima (atingem a capacidade de Shannon)
3. **Criptografia baseada em reticulados.**

2. **Codificação em canais AWGN e Wiretap.**
   - O *fator de achamento* é definido como a distância L^∞ entre uma distribuição enrolada e uma uniforme em $\mathcal{D}$:

$$\epsilon_\Lambda(p) = \sup_{x\in\mathcal{D}} \left| p_w(x) - \frac{1}{\det \Lambda} \right|$$

   - quando temos um canal AWGN ou Wiretap com ruído gaussiano, o fator de achatamento pode ser usado construír códigos com eficiência máxima (atingem a capacidade de Shannon)

3. **Criptografia baseada em reticulados.**
   - O parâmetro de suavização, equivalente ao fator de achatamento, é um parâmetro de garantia de segurança e confiabilidade na criptografia pós-quântica baseada em reticulados.

Distribuições quantizadas

- pode ser considerada uma operação dual ao enrolamento.

Distribuições quantizadas

- pode ser considerada uma operação dual ao enrolamento.
- a **distribuição quantizada** por um reticulado Λ e uma região fundamental $\mathcal{D}$ é a distribuição $p_{\mathcal{Q}} : \Lambda \to \mathbb{R}_+$,

$$p_{\mathcal{Q}}(\lambda) = \int_{\mathcal{D}} p(x+\lambda)\,\mathrm{d}x.$$

Distribuições quantizadas

- pode ser considerada uma operação dual ao enrolamento.
- a **distribuição quantizada** por um reticulado Λ e uma região fundamental $\mathcal{D}$ é a distribuição $p_{\mathcal{Q}} : \Lambda \to \mathbb{R}_+$,

$$p_{\mathcal{Q}}(\lambda) = \int_{\mathcal{D}} p(x + \lambda) \, \mathrm{d}x.$$

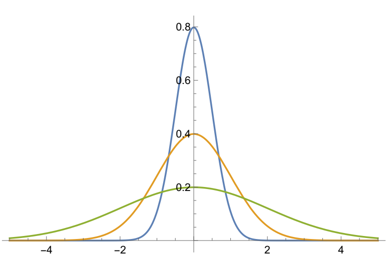
  - se o enrolamento é somar $p(x + \lambda)$ em λ, a quantização é "somar" (integrar) $p(x + \lambda)$ em x.

Distribuições quantizadas

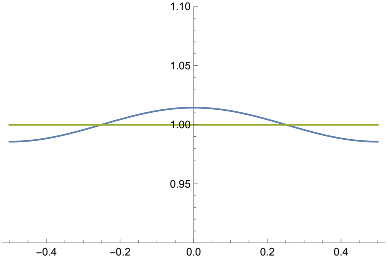
- pode ser considerada uma operação dual ao enrolamento.
- a **distribuição quantizada** por um reticulado Λ e uma região fundamental $\mathcal{D}$ é a distribuição $p_{\mathcal{Q}} : \Lambda \to \mathbb{R}_+$,

$$p_{\mathcal{Q}}(\lambda) = \int_{\mathcal{D}} p(x+\lambda)\, \mathrm{d}x.$$

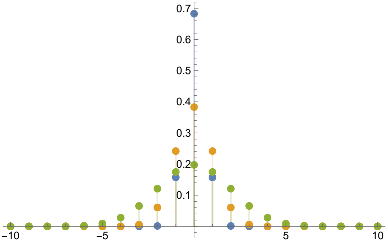
  - se o enrolamento é somar $p(x+\lambda)$ em λ, a quantização é "somar" (integrar) $p(x+\lambda)$ em x.
  - é uma forma de transformar uma distribuição de probabilidade contínua em uma discreta.



(a) Original



(b) Enrolada



(c) Quantizada

Descrição em variáveis aleatórias

- uma função densidade $p(x)$ descreve a distribuição de uma variável aleatória X, com

$$\mathbb{P}[X \in A] = \int_A p(x)\,\mathrm{d}x$$

Notação: $X \sim p$

Descrição em variáveis aleatórias

- uma função densidade $p(x)$ descreve a distribuição de uma variável aleatória X, com
$$\mathbb{P}[X \in A] = \int_A p(x)\,\mathrm{d}x$$
Notação: $X \sim p$

- temos duas funções: o enrolamento $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{D}$ e a quantização $\mathcal{Q}\colon \mathbb{R}^n \to \Lambda$, que são definidas por
$$\pi(y+\lambda) = y, \qquad \mathcal{Q}(y+\lambda) = \lambda,$$
para todo $y \in \mathcal{D}$, $\lambda \in \Lambda$

- as distribuições enroladas podem ser descritas em termos de variáveis aleatórias:

$$X \sim p \implies \begin{cases} X_\pi := \pi(X) \sim p_\pi \\ X_{\mathcal{Q}} := \mathcal{Q}(X) \sim p_{\mathcal{Q}} \end{cases},$$

- as distribuições enroladas podem ser descritas em termos de variáveis aleatórias:

$$X \sim p \implies \begin{cases} X_\pi := \pi(X) \sim p_\pi \\ X_\mathcal{Q} := \mathcal{Q}(X) \sim p_\mathcal{Q} \end{cases},$$

- se definimos X_π e $X_\mathcal{Q}$ dessa forma, temos que $X = X_\pi + X_\mathcal{Q}$

- as distribuições enroladas podem ser descritas em termos de variáveis aleatórias:

$$X \sim p \implies \begin{cases} X_\pi := \pi(X) \sim p_\pi \\ X_\mathcal{Q} := \mathcal{Q}(X) \sim p_\mathcal{Q} \end{cases},$$

- se definimos X_π e $X_\mathcal{Q}$ dessa forma, temos que $X = X_\pi + X_\mathcal{Q}$
- essa descrição estabelece uma relação entre as distribuições enrolada e quantizada, e nos permite investigar propriedades dessa relação

Esperança

- a esperança (média) de uma variável aleatória X (ou de uma distribuição p) é $E[X] := \int_{\mathbb{R}^n} xp(x)\,\mathrm{d}x$

Esperança

- a esperança (média) de uma variável aleatória X (ou de uma distribuição p) é $E[X] := \int_{\mathbb{R}^n} xp(x)\,\mathrm{d}x$
- as esperanças enrolada e quantizada são $E[X_\pi] = \int_{\mathcal{D}} xp_\pi(x)\,\mathrm{d}x$ e $E[X_\mathcal{Q}] = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda p_\mathcal{Q}(\lambda)$

Esperança

- a esperança (média) de uma variável aleatória X (ou de uma distribuição p) é $E[X] := \int_{\mathbb{R}^n} xp(x)\,\mathrm{d}x$
- as esperanças enrolada e quantizada são $E[X_\pi] = \int_{\mathcal{D}} xp_\pi(x)\,\mathrm{d}x$ e $E[X_\mathcal{Q}] = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda p_\mathcal{Q}(\lambda)$
- disso, temos que $E[X] = E[X_\pi] + E[X_\mathcal{Q}]$

Entropia

$$H[X] = -\int_{\mathbb{R}^n} p(x) \log p(x)\, \mathrm{d}x,$$
$$H[X_\pi] = -\int_{\mathcal{D}} p_\pi(y) \log p_\pi(y)\, \mathrm{d}y,$$
$$H[X_\mathcal{Q}] = -\sum_{\lambda \in \Lambda} p_\mathcal{Q}(\lambda) \log p_\mathcal{Q}(\lambda)$$

- temos $H[X] \leq H[X_\pi] + H[X_\mathcal{Q}]$

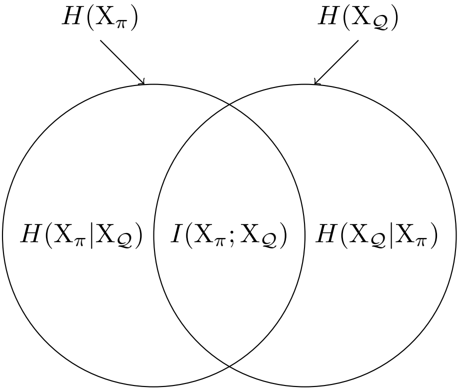
Entropia

$$H[X] = -\int_{\mathbb{R}^n} p(x) \log p(x)\, \mathrm{d}x,$$

$$H[X_\pi] = -\int_{\mathcal{D}} p_\pi(y) \log p_\pi(y)\, \mathrm{d}y,$$

$$H[X_\mathcal{Q}] = -\sum_{\lambda \in \Lambda} p_\mathcal{Q}(\lambda) \log p_\mathcal{Q}(\lambda)$$

- temos $H[X] \leq H[X_\pi] + H[X_\mathcal{Q}]$
- mais precisamente, $H[X] = H[X_\pi] + H[X_\mathcal{Q}] - I(X_\pi; X_\mathcal{Q})$


$H(\mathrm{X}_\pi)$
$H(\mathrm{X}_\mathcal{Q})$
$H(\mathrm{X}_\pi|\mathrm{X}_\mathcal{Q})$
$I(\mathrm{X}_\pi;\mathrm{X}_\mathcal{Q})$
$H(\mathrm{X}_\mathcal{Q}|\mathrm{X}_\pi)$

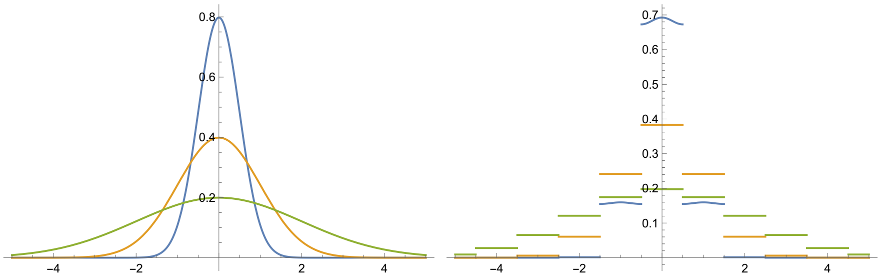
Informação mútua

- estamos interessados em entender como essa informação mútua se comporta

Informação mútua

- estamos interessados em entender como essa informação mútua se comporta
- ela pode ser caracterizada através da divergência de Kullback-Leibler como
$$I(X_\pi; X_\mathcal{Q}) = D_{\mathrm{KL}}(p || p_\pi \otimes p_\mathcal{Q}),$$
onde p é a distribuição original e $p_\pi \otimes p_\mathcal{Q}(x) = p_\pi(\pi(x)) p_\mathcal{Q}(\mathcal{Q}(x))$

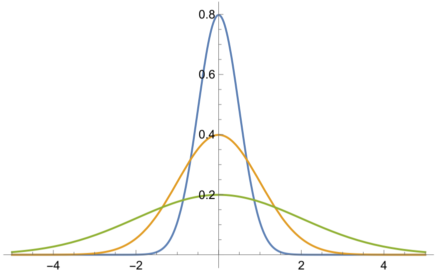
Distribuições normais com média 0



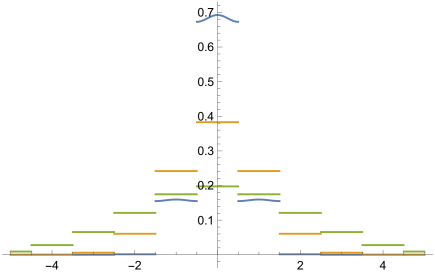
(a) Original (b) $p_\pi \otimes p_\mathcal{Q}$

- σ grande $\implies$ $p_\pi \approx \frac{1}{\det \Lambda}$ e $p_\mathcal{Q} \approx \det \Lambda \cdot p$ $\implies$ $p_\pi \otimes p_\mathcal{Q}$ aproxima p

Distribuições normais com média 0



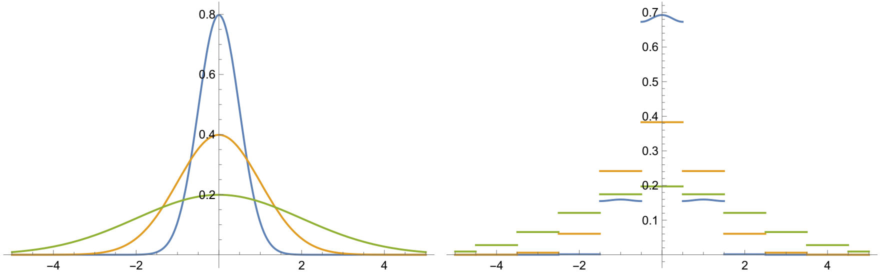
(a) Original



(b) $p_\pi \otimes p_\mathcal{Q}$

- σ grande $\implies$ $p_\pi \approx \frac{1}{\det \Lambda}$ e $p_\mathcal{Q} \approx \det \Lambda \cdot p$ $\implies$ $p_\pi \otimes p_\mathcal{Q}$ aproxima p
- σ pequeno $\implies$ $p_\mathcal{Q} \approx \delta_0$ e $p_\pi \approx p|_\mathcal{D}$ $\implies$ $p_\pi \otimes p_\mathcal{Q}$ aproxima p

Distribuições normais com média 0



(a) Original (b) $p_\pi \otimes p_\mathcal{Q}$

- σ grande $\implies$ $p_\pi \approx \frac{1}{\det \Lambda}$ e $p_\mathcal{Q} \approx \det \Lambda \cdot p$ $\implies$ $p_\pi \otimes p_\mathcal{Q}$ aproxima p
- σ pequeno $\implies$ $p_\mathcal{Q} \approx \delta_0$ e $p_\pi \approx p|_\mathcal{D}$ $\implies$ $p_\pi \otimes p_\mathcal{Q}$ aproxima p
- assim, $I(X_\pi; X_\mathcal{Q}) = D_{\mathrm{KL}}(p || p_\pi \otimes p_\mathcal{Q}) \to 0$ para σ grande ou para σ pequeno

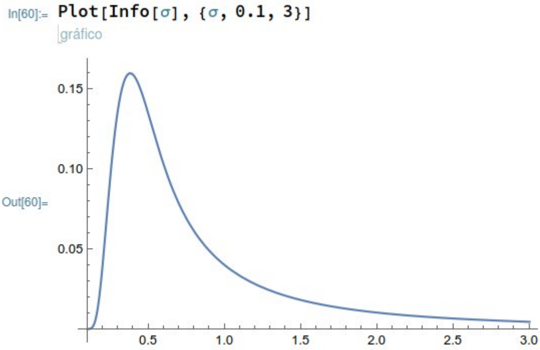


Figura: $I(X_\pi; X_\mathcal{Q})$ em função de σ.

- máximo: $\sigma \approx 0.38$

Outras perspectivas

- estudar o comportamento da informação de Fisher por enrolamento em quantização ($G_\pi \leq G$ e $G_{\mathcal{Q}} \leq G$)

Outras perspectivas

- estudar o comportamento da informação de Fisher por enrolamento em quantização ($G_\pi \leq G$ e $G_\mathcal{Q} \leq G$)
- estudar medidas de distância e divergência nas distribuições enrolada e quantizada (tendo em vista o fator de achatamento)

Outras perspectivas

- estudar o comportamento da informação de Fisher por enrolamento em quantização ($G_\pi \leq G$ e $G_{\mathcal{Q}} \leq G$)
- estudar medidas de distância e divergência nas distribuições enrolada e quantizada (tendo em vista o fator de achatamento)
- relação com transformada de Fourier: $\widehat{p_\pi} = \widehat{p}|_{\Lambda^*}$

[1] T. M. Cover e Joy A. Thomas. *Elements of information theory*. 2nd ed. OCLC: ocm59879802. Hoboken, N.J: Wiley-Interscience, 2006. ISBN: 9780471241959.

[2] Cong Ling e Jean-Claude Belfiore. "Achieving AWGN Channel Capacity With Lattice Gaussian Coding". Em: *IEEE Transactions on Information Theory* 60.10 (out. de 2014), pp. 5918–5929. ISSN: 1557-9654. DOI: 10.1109/TIT.2014.2332343.

[3] Cong Ling, Laura Luzzi e Jean-Claude Belfiore. "Lattice codes achieving strong secrecy over the mod-Λ Gaussian Channel". Em: *2012 IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings*. ISSN: 2157-8117. Jul. de 2012, pp. 2306–2310. DOI: 10.1109/ISIT.2012.6283924.

[4] K. V Mardia e Peter E Jupp. *Directional statistics*. English. OCLC: 1039171708. Chichester; New York: J. Wiley, 2010. ISBN: 9780470317815 9780470316979.